Les idées froides

UNE INTRODUCTION A LA RELATIVITE RESTREINTE

ETRE PLUS VIEUX EN VIEILLISSANT MOINS VITE

En affirmant que la lumière se déplaçait à la même vitesse dans tous les repères, Einstein a bouleversé la manière dont on devait appréhender les notions si intuitives de distance et de temps.

Dans ce dossier, on réfléchit sur une expérience simple qui amène à bien comprendre comment les trois phénomènes relativistes sont nécessaires pour que la vitesse de la lumière soit constante.

La difficulté est dans la recherche de symétrie car on comprend mal comment le ralentissement du temps et la contraction des longueurs peuvent être observés dans les deux référentiels.

Novembre 2011
http://www.ligloo.net

Sommaire

LA RELATIVITE RESTREINTE EN UNE SEULE EXPERIENCE 2
Les postulats de base 2
L'expérience 3
Premier essai : la contraction des longueurs 3
Deuxième essai : la dilatation du temps 4
Un problème de symétrie 4
L'inclinaison du temps 5
La description complète de l'expérience 6
Vu du quai 6
Vu du train 7
LE COIN DU MATHEUX 7
Inclinaison du temps 7
Résolution vu du quai 7
Au départ, ... 8
A l'arrivée, ... 8
Résolution vu du train 8
Au départ, ... 8
A l'arrivée, ... 8
Application numérique 9

Une expérience de la pensée pour découvrir les phénomènes étranges de la relativité restreinte

LA RELATIVITE RESTREINTE EN UNE SEULE EXPERIENCE

On manipule aisément les notions de position, de temps et de vitesse. On sait qu'à 100 km/h on parcourt 100 km en une heure, que les vitesses s'ajoutent, que sa montre marche aussi bien sur le quai que dans le train. Einstein est venu bouleverser cette connaissance intuitive en expliquant que ça devenait faux pour les très hautes vitesses, celles des particules comme les électrons ou les photons, bref des vitesses qu'aucun être humain n'atteindra jamais s'il n'est pas dans un film de SF.

En simplifiant l'histoire, Einstein a posé quelques postulats de base pas trop gênants a priori. De ces postulats découlent des conséquences contraires à nos intuitions les plus élémentaires.

Pour expliquer ces conséquences, on décrit différentes expériences successives, chacune montrant une des conséquences. Je propose ici de retrouver ces conséquences relativistes au moyen d'une seule expérience de la pensée ce qui permet de bien sentir que ce ne sont pas des effets successifs mais des effets imbriqués indissociables.

Si je prends de temps à autres des valeurs numériques pour fixer les idées et alléger la rédaction, jamais je n'introduis d'équation.

Les postulats de base

La vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels.

Les postulats de base sont assez simples : d'une part, la vitesse de la lumière est la vitesse maximum qu'un objet peut atteindre, d'autre part, cette vitesse est toujours la même, quelle que soit sa propre vitesse.

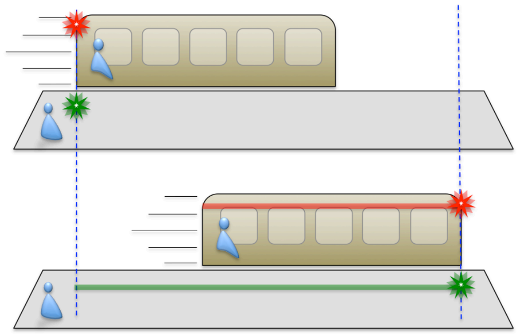
Le premier postulat n'est en soi pas trop troublant. Après tout, pourquoi pas ? Cette vitesse, de 300 000 km/s environ, n'est pas une limite trop contraignante dans notre quotidien.

Le second postulat est plus troublant. On sait bien que si on avance sur un tapis roulant, sa vitesse de marche s'ajoute à celle du tapis. Le second postulat affirme que si je marche à la vitesse de la lumière sur un tapis roulant, je marche exactement à la même vitesse (celle de la lumière donc) pour quelqu'un qui est immobile à côté du tapis. La vitesse du tapis ne s'ajoute pas à celle de la lumière.

Il y a un troisième postulat, beaucoup plus classique, mais qui va poser beaucoup de questions lorsqu'on aborde la relativité restreinte : le postulat de la symétrie. Selon ce dernier postulat, si un train se déplace à une certaine vitesse par rapport au quai, alors, symétriquement, pour le train, c'est le quai qui se déplace à la même vitesse, dans l'autre sens.

> *En toute rigueur, ce que j'appelle le postulat de symétrie est appelé le postulat d'équivalence des référentiels inertiels.*

L'expérience



Au moment où la passagère du train est au niveau de l'observateur sur le quai, tous deux émettent un rayon lumineux vers l'avant. Comme la vitesse de la lumière du train n'est pas plus rapide que celle du quai, les deux rayons sont strictement identiques et atteignent le bout du wagon en même temps. Pourtant, vu du train, la lumière ne parcourt que la longueur du wagon alors que, vu du quai, elle parcourt le déplacement en plus.

Imaginons un train qui longe le quai d'une gare à vitesse constante très élevée. Dans le train, une passagère à l'arrière d'un wagon décide d'envoyer un faisceau de lumière vers l'avant. A l'instant précis où elle allume son laser, un observateur sur le quai, qui se trouve exactement au même niveau, déclenche lui aussi un faisceau de lumière vers l'avant.

D'après le postulat de constance de la vitesse de la lumière, les deux faisceaux ont exactement la même vitesse, celle de la lumière. Ils sont rigoureusement identiques.

Donc lorsque le faisceau dans le train va finir par atteindre l'avant du wagon, le faisceau du quai sera lui aussi au niveau de l'avant du wagon.

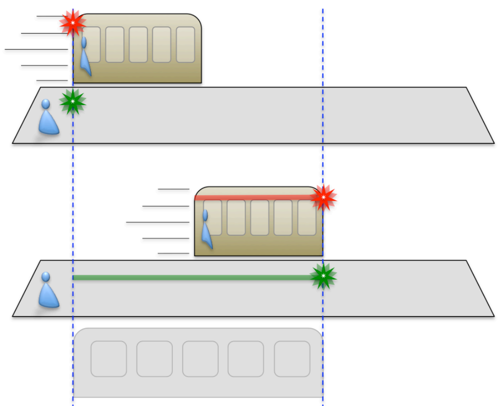
Comparons maintenant les deux points de vue.

La passagère du wagon dit : « Le faisceau laser est allé de l'arrière du wagon à l'avant. Sa longueur vaut celle du wagon. »

L'observateur sur le quai dit : « Comme le wagon s'est déplacé durant l'expérience, le faisceau laser a parcouru la longueur du wagon plus le déplacement du wagon. »

Nécessairement, le trajet vu du quai est plus grand que le trajet vu du wagon. Or, d'après les postulats, ce sont rigoureusement les mêmes faisceaux. Comment peuvent-ils avoir une longueur différente ?

Premier essai : la contraction des longueurs



La vitesse est calculée en divisant la longueur du trajet par sa durée. Comme le résultat du calcul est identique dans les deux repères, soit les valeurs sont identiques, soit elles ne le sont pas. Si elles sont identiques, c'est que la taille du wagon se contracte de telle sorte que le trajet sur le quai vaut exactement la longueur du wagon à l'arrêt.

Réexaminons ce que dit le postulat : la vitesse de la lumière est la même dans le wagon et sur le quai. Il ne parle ni de longueur ni de temps, juste de vitesse, c'est-à-dire de la division de la longueur du trajet par sa durée. L'observateur et la passagère font chacun leurs mesures de distance et de durée et les deux divisions donnent le même résultat. C'est tout ce que dit le postulat.

Pour que le résultat des deux divisions soient identiques, soit les valeurs mesurées par chacun sont les mêmes, soient elles diffèrent. Par exemple, la passagère peut mesurer 300 000 km parcourus en une seconde et l'observateur 600 000 km parcourus en deux secondes. Le postulat sera bien respecté.

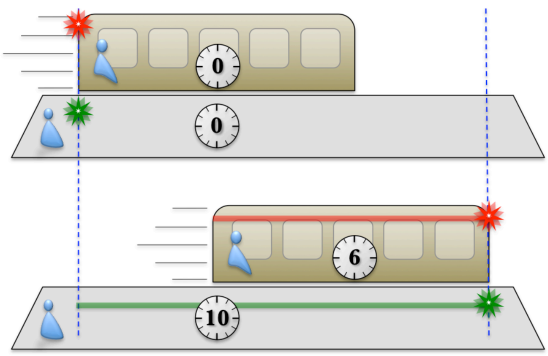
Imaginons tout d'abord que les valeurs soient les mêmes. On oblige ainsi la longueur sur le quai à être identique à la longueur du wagon. Le déplacement n'est pas nul par définition, sinon le wagon serait immobile. Donc, vu du quai, la longueur du wagon est plus petite… que le wagon !

Ce phénomène est appelé la contraction des longueurs.

Le wagon se contracte vu du quai. Mais pour la passagère, tout reste normal, le wagon a exactement les mêmes dimensions que lors du départ. De l'intérieur, la mesure de la distance parcourue donne toujours la même valeur : la longueur du wagon à l'arrêt. En revanche, pour l'observateur sur le quai, le wagon est moins long. Il se déplace durant l'expérience, mais au final, la longueur du wagon rétréci plus le déplacement donne la longueur du wagon à l'arrêt.

Si ça se passait comme ça, l'observateur et la passagère auraient les mêmes valeurs pour la distance et le temps. Ils seraient en conséquence parfaitement d'accord sur le calcul de la vitesse.

Deuxième essai : la dilatation du temps



L'autre possibilité, c'est que les valeurs ne soient pas identiques. Le trajet mesuré dans le train étant moins long que mesuré du quai, le temps dans le train doit s'écouler moins vite.

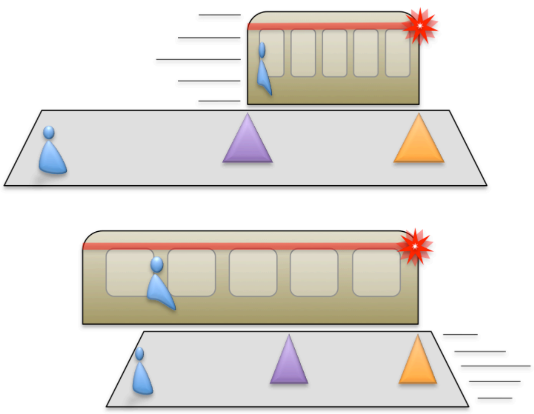
Nous avons une deuxième possibilité pour le calcul des vitesses : les valeurs mesurées ne sont pas les mêmes.

Nous allons ainsi accepter que la distance sur le quai soit plus grande que la longueur du wagon. Comme la vitesse est la même, c'est que le temps écoulé n'est pas le même : il s'écoule moins de temps pour la passagère que pour l'observateur.

Cette seconde possibilité est bien une solution qui marche pour expliquer les résultats de notre expérience. Pendant qu'il s'écoule, mettons, 10 secondes sur le quai, il s'écoule seulement 6 secondes dans le train en mouvement. Il est dès lors normal que la lumière parcoure une distance moins longue pendant qu'il s'écoule moins de temps.

La vitesse du wagon par rapport au quai fait que le temps s'écoule moins vite que sur le quai. Ce phénomène relativiste s'appelle la dilation du temps.

Un problème de symétrie

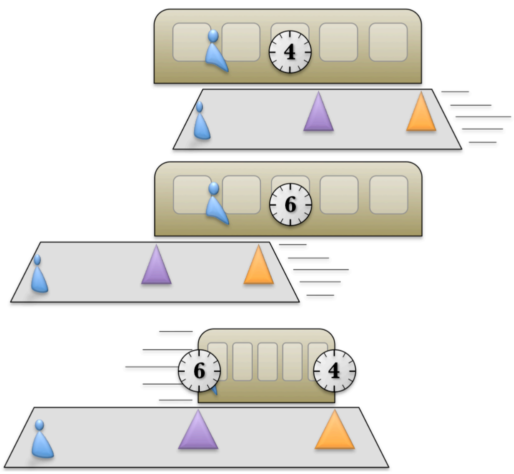


La contraction des longueurs n'est pas un phénomène symétrique. La distance entre les deux repères sur le quai est moins grande que la longueur du wagon à l'arrêt. De plus, vu du wagon, c'est le quai qui se déplace et donc la distance entre les repères apparaît encore plus courte. Vu du wagon, les extrémités ne peuvent plus être simultanément au niveau de leur repère.

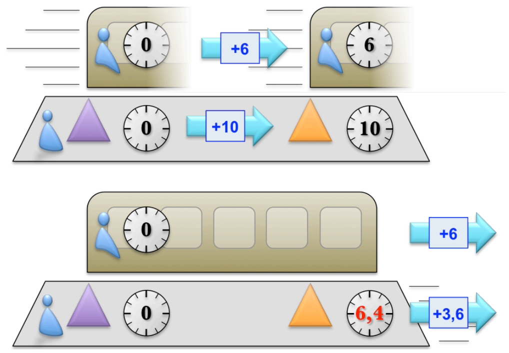
Chacun des deux phénomènes imaginés peut sembler suffisant pour expliquer l'expérience. Les deux souffrent cependant du même défaut : ils ne sont pas symétriques ! En effet, si le wagon se contracte du fait de sa vitesse et si le temps s'y écoule moins vite, la perception doit être parfaitement symétrique : les longueurs sur le quai devraient se contracter et le temps passer moins vite du point de vue de la passagère immobile dans le train et voyant le quai défiler.

Mais ce n'est pas possible.

Plaçons deux repères sur le quai pour marquer l'emplacement du wagon au moment où le rayon de lumière atteint son but. Du fait de la contraction des longueurs, la distance entre ces repères est moins grande que la longueur du wagon. Du point de vue de la passagère, le wagon a une taille « normale » et ne tiendra donc pas entre les repères qu'elle voit sur le quai. Pire, les distances sur le quai sont contractées, et donc les repères paraissent encore plus rapprochés qu'ils ne le sont réellement.



Vu du wagon :
l'avant et l'arrière du wagon ne passent pas simultanément devant leur repère
Vu du quai :
l'avant et l'arrière n'ont pas le même âge



Vu du quai :
quand il s'écoule 10 secondes, il s'écoule seulement 6 secondes dans le train. Il y a un écart d'âge au second repère.
Vu du train :
symétriquement, le temps s'écoule moins vite sur le quai. Pour retrouver la différence d'âge au second repère, il faut que les âges sur le quai ne soient pas les mêmes.

Vu du wagon, le wagon ne tient pas entre les repères marqués sur le quai. Cela veut dire que lorsque l'avant du wagon sera au niveau de son repère, l'arrière ne sera pas encore au niveau du sien. Il faudra attendre encore un peu. Ensuite seulement, l'arrière du wagon atteindra son repère.

On vient simplement de dire que vu du wagon, l'arrière et l'avant ne sont pas **simultanément** devant leur repère respectif.

Cela signifie que si au niveau de chaque repère, un observateur sur le quai demande l'heure à la passagère qui se trouve à son niveau (une passagère à l'arrière et une passagère à l'avant donc), les résultats ne seront pas les mêmes : **les passagères n'ont pas le même âge vu du quai**.

Cette conséquence étrange est directement liée à l'hypothèse de contraction de longueurs.

Imaginons maintenant que l'expérience ne s'explique pas par la contraction des longueurs mais seulement par la dilation du temps. Nous avons dit que lorsqu'il s'écoule 10 secondes sur le quai, il s'écoule seulement 6 secondes dans le train. Par symétrie, vu du train, lorsqu'il s'écoule 6 secondes, il s'écoule seulement 60% de ce temps sur le quai, donc seulement 3,6 secondes.

Pour que vu du train, l'observateur sur le quai soit âgé de 10 secondes alors que la passagère n'a vécu que 6 secondes, il faut que l'observateur soit déjà plus âgé de le départ : **les observateurs sur le quai n'ont pas le même âge**.

L'inclinaison du temps

Nous avons passé en revue les trois conséquences des postulats relativistes. Vu d'un référentiel « fixe », dans un référentiel « en mouvement » :

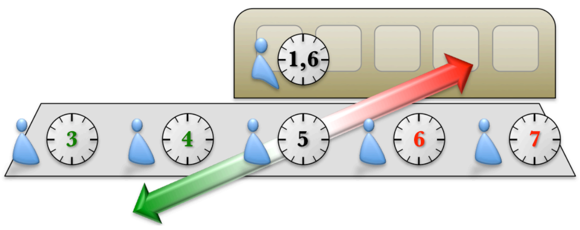
- Les longueurs se contractent
- Les durées se dilatent
- Les événements ne sont plus simultanés

La perte de simultanéité n'est pas très intuitive. Une meilleure appellation pourrait être **l'inclinaison du temps** : ce sont tous les âges qui se mettent à changer dans le référentiel en mouvement, croissant devant, décroissant derrière. Ceux qui viennent vers nous sont plus âgés et ceux qui s'éloignent sont plus jeunes. Attention, plus jeunes et plus vieux **par rapport à l'observateur qui se trouve à notre niveau**, pas par rapport à notre propre âge.

La comparaison des âges entre deux référentiels n'a plus aucun sens. Lorsque vous voyez quelqu'un de plus jeune ou de plus vieux, vous n'êtes pas surpris : il est né avant ou après vous. Avec la relativité, il faudrait ajouter qu'il est né à une autre vitesse.

Cette inclinaison du temps n'est pas si surprenante. On comprend très bien que la position des objets change lorsque les longueurs se contractent. De la même manière, lorsque les durées se dilatent, la position dans le temps des objets change.

Nous avons vu que l'inclinaison du temps est un phénomène qui apparaît pour assurer la symétrie de la dilation des durées et de la contraction des longueurs. Réciproquement, imaginons le seul phénomène de l'inclinaison du temps. Imaginons ainsi un train qui défile devant vous. Compte tenu de sa longueur, il doit mettre une minute au total. En temps normal, vous verrez le dernier wagon une minute après la locomotive. Les gens dans le dernier wagon seront donc plus âgés d'une minute.



L'inclinaison du temps

Appelé normalement « perte de simultanéité », *l'inclinaison du temps fait que vu du référentiel « fixe » (le train ici), les âges ne sont plus les mêmes dans le référentiel en mouvement : ils sont de plus en plus élevés pour ceux qui se rapprochent et de moins en moins élevés pour ceux qui s'éloignent* ***par rapport à l'âge de l'observateur sur le quai.*** *L'âge dans le train n'intervient pas.*

D'un coup de baguette relativiste, on « incline » le temps dans le train : pour vous les gens à l'arrière sont plus âgés que les gens à l'avant. Disons qu'ils sont plus âgés de 50 secondes. Vous verrez alors le dernier wagon seulement 10 secondes après la locomotive : la longueur du train se contracte. Vu du wagon, vous n'aurez vieilli que de 10 secondes au lieu d'une minute dans train : le temps se dilate.

La description complète de l'expérience

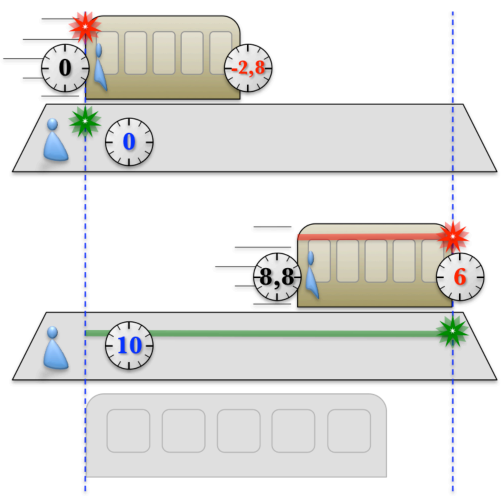
Nous avons vu que pour expliquer l'égalité de la vitesse de la lumière sur le quai et dans le train, il fallait soit que les longueurs se contractent, soit que les durées se dilatent. Pour assurer la symétrie, chacun de ses deux phénomènes implique l'inclinaison du temps. Or l'inclinaison du temps implique à son tour à la fois la dilation du temps et la contraction des longueurs.

Les trois phénomènes relativistes se produisent donc tous les trois de manière indissociable et imbriquée.

Nous allons les utiliser pour décrire complètement notre expérience.

Vu du quai

Les trois phénomènes se conjuguent : la taille du wagon diminue mais la distance sur le quai est quand même supérieure à celle du wagon à l'arrêt. Il faut donc également que le temps s'écoule moins vite dans le wagon. Dans cet exemple, il ne s'écoule que 8,8 secondes pendant les 10 secondes sur le quai.

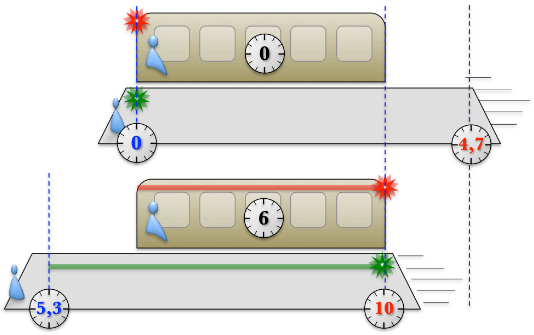


L'expérience vue du quai

La longueur sur le quai est plus grande que le wagon. La taille du wagon apparaît contractée. Les âges ne sont pas les mêmes dans le train. A l'arrivée, les 6 secondes nécessaires au déplacement dans le wagon apparaissent sur l'horloge de l'avant.

Vu du quai, les âges ne sont pas les mêmes aux deux extrémités du wagon : l'avant qui s'éloigne de l'observateur, est moins âgé que la passagère du train. Cela signifie que lorsque le rayon part de l'arrière du wagon, vu du quai, l'avant du wagon est situé 2,8 secondes avant ce déclenchement.

Cela signifie que la passagère à l'avant du wagon va encore attendre 2,8 secondes avant que le rayon ne parte. Comme il ne s'écoule que 8,8 secondes dans le train, au final, les 6 secondes nécessaires à la lumière apparaissent bien sur l'horloge à l'avant du wagon au moment où le rayon atteint ce point.



L'expérience vue du train
Pendant qu'il s'écoule 6 secondes dans le train, il s'écoule 5,3 secondes sur le quai. Au moment où le rayon est déclenché dans le wagon, cela fait déjà 4,7 secondes qu'il est parti pour le point d'arrivée sur le quai. L'horloge indique bien 10 secondes à la fin.

Toujours vu du quai, lorsque le rayon atteint son but, pour la passagère arrière cela fait déjà 2,8 secondes que c'est le cas.

Vu du train

Alors que dans le train, il s'écoule 6 secondes, il ne s'écoule que 5,3 secondes sur le quai. Mais lorsque le rayon part, le point d'arrivée sur le quai, qui se rapproche de la passagère, est déjà âgé de 4,7 secondes. Pour lui, le rayon a pratiquement déjà parcouru la moitié de son trajet.

A l'arrivée du rayon, vu du train, le point de départ n'est pas encore âgé de 10 secondes. Pour lui, le rayon a à peine effectué la moitié du chemin.

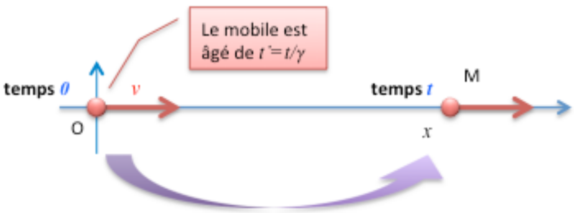
L'horloge sur le quai indique bien les 10 secondes attendues.

On notera que bien que ces deux histoires semblent très différentes, nos quatre observateurs diront la même chose. Les deux du départ affirmeront que lorsqu'ils se sont croisés, chacun avait sa montre à 0. Les deux de l'arrivée, diront que les horloges indiquaient 6 et 10 secondes.

LE COIN DU MATHEUX

Inclinaison du temps

Un mobile se déplace à la vitesse v du point O au point M d'abscisse $x = vt$. On note de manière très classique $\beta = \frac{v}{c}$ et $\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1-\beta^2}}}$.



Le mobile se déplace de x en t secondes

Le repère se déplace de x/γ en t/γ secondes

Dans le repère du mobile, c'est le point M qui se déplace. Du fait de la dilation des temps, il ne s'écoule que $t' = \frac{t}{\boldsymbol{\gamma}}$. A cet instant, nous savons que M est âgé de t. Or, du fait de la dilation du temps, le repère n'a vieilli que de $t'' = \frac{t'}{\gamma} = \frac{t}{\gamma^2}$.

Cela signifie que, au départ, l'âge de M vu du mobile vaut $a = t - \frac{t}{\gamma^2} = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{x}{v} = \beta\frac{x}{c}$.

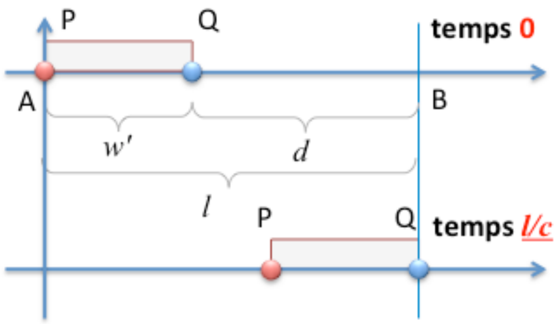
La formule donnant l'âge d'un point M d'un repère mobile vu d'un observateur dans un référentiel fixe est donnée par:

$$\boxed{a(x) = a(0) + \beta\frac{x}{c}}$$

Où $a(0)$ est l'âge du point du référentiel mobile au niveau de l'observateur et x la distance de M à ce point mesurée dans le référentiel mobile.

Résolution vu du quai

La lumière parcourt la distance l en $\frac{l}{c}$ secondes. La longueur propre du wagon est w. Vue du quai, elle vaut $w' = \frac{w}{\gamma}$.



La distance parcourue par le train vaut $d = v\frac{l}{c} = \beta l$.

La distance l est la somme de la longueur contractée du wagon et du déplacement :

$l = w' + d = \frac{w}{\gamma} + \beta l \Rightarrow l = \frac{w}{\gamma}(1-\beta)$.

Au départ, $t = 0$

L'âge de Q est donné par la formule d'inclinaison des temps :

$$\begin{cases} a(P) = a(A) = a(B) = 0 \\ a(Q) = -\beta\dfrac{w}{c} \end{cases}$$

A l'arrivée, $t = \frac{l}{c}$

Dans le train, il s'est écoulé $t' = \frac{1}{\gamma}\frac{l}{c}$ donc :

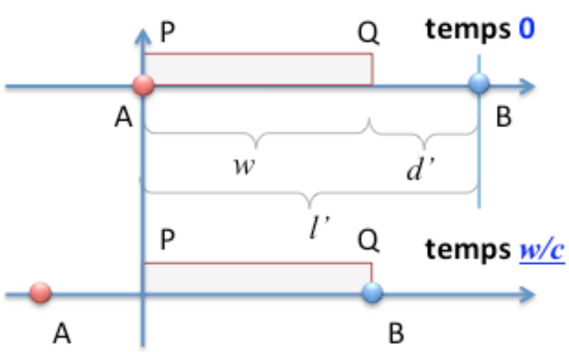
$$\begin{cases} a(A) = a(B) = \dfrac{l}{c} \\ a(P) = \dfrac{l}{\gamma c} \\ a(Q) = -\beta\dfrac{w}{c} + \dfrac{l}{\gamma c} \end{cases}$$

Avec l'expression $l = \frac{w}{\gamma}(1-\beta)$ on trouve bien :

$$a(Q) = \frac{w}{c}$$

C'est-à-dire le temps mis par la lumière pour parcourir le wagon.

Résolution vu du train



La lumière parcourt la distance w en $\frac{w}{c}$ secondes. La distance parcourue par le quai vaut $d' = v\frac{w}{c} = \beta w$.

La longueur du rayon sur le quai est la somme de la longueur du wagon et du déplacement du quai :

$l' = w + d' = (1+\beta)w$

On a vu que $l = \frac{w}{\gamma}(1-\beta)$ donc on a bien :

$\frac{l}{\gamma} = \frac{w}{\gamma^2}(1-\beta) = w(1+\beta) = l'$

Au départ, $t = 0$

$$\begin{cases} a(A) = a(P) = a(Q) = 0 \\ a(B) = \beta\dfrac{l}{c} \end{cases}$$

A l'arrivée, $t = \frac{w}{c}$

Il s'est écoulé $t' = \frac{1}{\gamma}\frac{w}{c}$ sur le quai, donc :

$$\begin{cases} a(P) = a(Q) = \dfrac{w}{c} \\ a(A) = \dfrac{w}{\gamma c} \\ a(B) = \beta \dfrac{l}{c} + \dfrac{w}{\gamma c} \end{cases}$$

Avec l'expression $l' = w(1 + \beta)$ on trouve bien :

$$a(Q) = \frac{l}{c}$$

C'est-à-dire le temps mis par la lumière pour parcourir la distance sur le quai.

Application numérique

Dans les exemples nous avons pris $\frac{l}{c} = 10$ et $\frac{w}{c} = 6$. Une valeur $\beta = 0{,}47$ ($\gamma = 1{,}13$) donne un tel rapport.